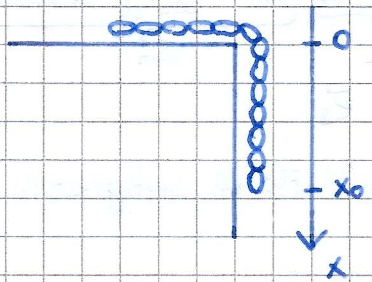
2. Tutorium - Theoretische Mechanik

30.10.19

① Beispiel: 1D-Bewegung einer Kette im homogenen Schwerefeld



Masse m
Länge L
keine Reibungskräfte
$\vec{g} = g \cdot \vec{e}_x$

Newton II: $\vec{F} = m(t) \cdot \vec{g}$

homogene Massenverteilung:

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{m}{L} x(t) \cdot \vec{g} \qquad m(t) = m \cdot x(t) \cdot \frac{1}{L}$$

$$\Rightarrow \underline{m \ddot{x}(t) = \frac{m}{L} x(t) \cdot g}$$

Exponentialansatz: $x(t) = A e^{\lambda t}$
$\ddot{x}(t) = A \cdot \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{g}{L} x(t) \qquad \Rightarrow \lambda^2 = \frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = A_1 \exp\left(\sqrt{\tfrac{g}{L}}\, t\right) + A_2 \cdot \exp\left(-\sqrt{\tfrac{g}{L}}\, t\right)}}$$

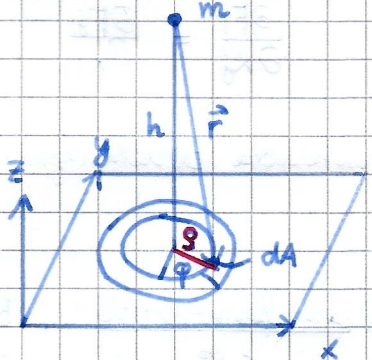
Anfangsbedingungen: $x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow A_1 + A_2 &= x_0 \\ \Rightarrow A_1 - A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} A_1 = A_2 = \frac{x_0}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\tfrac{g}{L}}\, t\right)}}$$

② Beispiel: unendlich ausgedehnte Platte mit homogener Massendichte σ, Berechne die Kraft auf einen Massepunkt m.

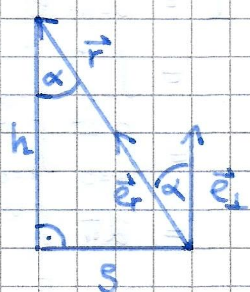
Da die Platte unendlich ausgedehnt ist, heben sich alle Komponenten parallel zur Platte auf $\vec{g} \,/\!/\,$ Platte $= 0$



$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{g}(z) \qquad \vec{F} = m\vec{g}$$

$$\vec{F} = -mG \iint \frac{\sigma}{r^2} \vec{e}_r \, dA$$

Von $\vec{e}_r$ wird nur die senkrechte Komponente $\vec{e}_\perp$ benötigt.



$$\vec{e}_\perp = \cos\alpha \, \vec{e}_z \quad \text{zudem} \quad \cos\alpha = \frac{h}{|\vec{r}|}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{\cos^2\alpha} \quad (\mathrm{I})$$

Für das Flächenelement dA auf der Platte gilt:

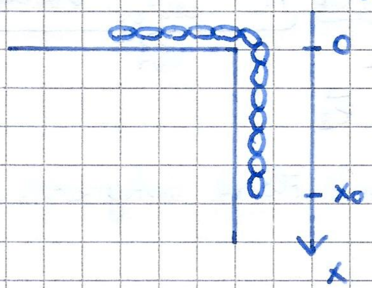
$$dA = \varrho \, d\varphi \, d\varrho$$

Aus der Zeichnung folgt: $\tan\alpha = \dfrac{\varrho}{h} \qquad \varrho = \tan\alpha \cdot h$

2. Tutorium - Theoretische Mechanik

30.10.19

1. Beispiel: 1D-Bewegung einer Kette im homogenen Schwerefeld



Masse m
Länge L
keine Reibungskräfte
$\vec{g} = g \cdot \vec{e}_x$

Newton II: $\vec{F} = m(t) \cdot \vec{g}$

homogene Massenverteilung:

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{m}{L} x(t) \cdot \vec{g} \qquad m(t) = m \cdot x(t) \cdot \frac{1}{L}$$

$$\Rightarrow \underline{m \ddot{x}(t) = \frac{m}{L} x(t) \cdot g}$$

Exponentialansatz: $x(t) = A e^{\lambda t}$
$\ddot{x}(t) = A \cdot \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{g}{L} x(t) \qquad \Rightarrow \lambda^2 = \frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = A_1 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)}}$$

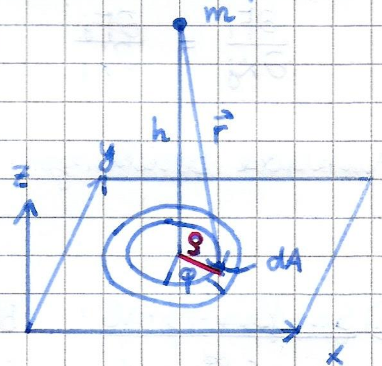
Anfangsbedingungen: $x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow A_1 + A_2 = x_0 \\ &\Rightarrow A_1 - A_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad A_1 = A_2 = \frac{x_0}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)}}$$

2. Beispiel: unendlich ausgedehnte Platte mit homogener Massendichte σ, Berechne die Kraft auf einen Massepunkt m.

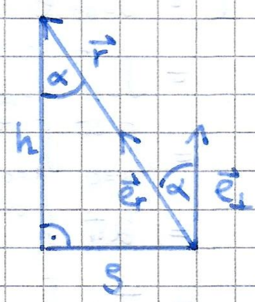
Da die Platte unendlich ausgedehnt ist, heben sich alle Komponenten parallel zur Platte auf $\vec{g} \parallel$ Platte $= 0$



$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{g}(z) \qquad \vec{F} = m\vec{g}$$

$$\vec{F} = -mG \iint \frac{\sigma}{r^2} \vec{e}_r \, dA$$

Von $\vec{e}_r$ wird nur die senkrechte Komponente $\vec{e}_\perp$ benötigt.



$$\vec{e}_\perp = \cos\alpha \, \vec{e}_z \qquad \text{zudem} \quad \cos\alpha = \frac{h}{|\vec{r}|}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{\cos^2\alpha} \quad (I)$$

Für das Flächenelement dA auf der Platte gilt:

$$dA = \rho \, d\varphi \, d\rho$$

Aus der Zeichnung folgt: $\tan\alpha = \frac{\rho}{h} \qquad \rho = \tan\alpha \cdot h$